Ermittlung der magnetischen Widerstandsänderung und der HALL-Spannung mittels eines Widerstandsnetzwerkes

Von C. B. BURCKHARDT und M. J. O. STRUTT

Aus dem Institut für Höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

(Z. Naturforschg. **18 a**, 44—51 [1963] ; eingegangen am 19. Oktober 1962)

The potential of a semiconductor slab in a magnetic field satisfies LAPLACE's equation $\Delta V = 0$. The magnetic field causes a special boundary condition at the free boundaries. It is shown how this boundary value problem is solved by means of a resistance-network and feeding currents. For obtaining stability of the iterative process the feeding currents have to be calculated by a special method. The accuracy of the solutions obtained is good, as comparison with calculation (square slab) and measurements (square gyrator) shows. Further possibilities of application are suggested.

Der HALL-Effekt fand in den letzten Jahren dank der Entwicklung von Halbleitermaterialien mit hoher Trägerbeweglichkeit in einer Anzahl von Halbleiterelementen praktische Verwendung [1–3]. Für die Entwicklung und Anwendung solcher Elemente ist es äußerst nützlich, die Potential- und Stromverteilung theoretisch ermitteln zu können. WICK [4], LIPPMANN und KUHRT [5, 6] und HAEUSLER [7] lösen das Potentialproblem der Rechteckplatte mittels konformer Abbildung, wobei jedoch einzelne Integrale numerisch ausgewertet werden oder Näherungen entwickelt werden müssen. Von BROUDY [8] stammt ein Analogieverfahren, das gestattet, den HALL-Koeffizienten aus der Messung an einer Probe beliebiger Geometrie zu ermitteln. Die vorliegende Arbeit behandelt die Ermittlung des Potentialfeldes mittels eines Widerstandsnetzwerkes und Stromeinspeisung.

1. Problemstellung und Grundgleichungen des Feldes

Wir betrachten im folgenden eine ebene Halbleiterplatte (Abb. 1), deren Dicke überall konstant gleich d sei und zu der senkrecht ein Magnetfeld der Flußdichte B stehe, die über den Bereich der Platte ebenfalls konstant sei. Einzelne Bereiche des Randes sind dabei aus Material mit großer elektrischer Leitfähigkeit ausgeführt, sie seien im folgenden als *Elektroden* bezeichnet, der übrige Rand als *freier Rand.*

Symbolverzeichnis

a:	Elektrodenlänge des quadratischen Gyrators (Abb. 8).
$\boldsymbol{B}$:	Magnetische Flußdichte.
b:	Seitenlänge des quadratischen Gyrators (Abb. 8).
d:	Dicke der Halbleiterplatte.
$\boldsymbol{E}$:	Elektrische Feldstärke.
E_V:	Senkrecht zum Schnitt stehende Feldstärkekomponente (Abb. 6).
E_H:	Parallel zum Schnitt stehende Feldstärkekomponente (Abb. 6).
g:	Übertragungsverlust des Gyrators bei beidseitiger Anpassung.
h:	Maschenweite.
I:	Einspeisestrom.
I_M:	Strom, der im Netzwerk fließt.
I_W:	Strom, der in der Halbleiterplatte fließt.
$\boldsymbol{j}$:	Stromdichte.
j_V:	Stromdichte senkrecht zum Schnitt (Abb. 6).
k:	Proportionalitätsfaktor zwischen Potential in der Halbleiterplatte und im Netzwerk.
n:	Normalenrichtung.
R:	Netzwerkwiderstand.
R':	Randwiderstand.
$R(0)$:	Widerstand einer Platte ohne Magnetfeld.

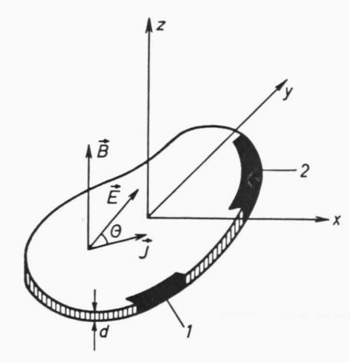


Abb. 1. Halbleiterplatte und physikalische Größen.

[1] M. J. O. STRUTT, Scientia Electrica **4**, 92 [1958].
[2] W. J. GRUBBS, Bell Syst. Techn. J. **38**, 853 [1959].
[3] W. HARTEL, Siemens-Z. **28**, 376 [1954].
[4] R. F. WICK, J. Appl. Phys. **25**, 741 [1954].
[5] H. J. LIPPMANN u. F. KUHRT, Z. Naturforschg. **13 a**, 462 [1958].
[6] H. J. LIPPMANN u. F. KUHRT, Z. Naturforschg. **13 a**, 474 [1958].
[7] J. HAEUSLER, Z. Naturforschg. **17 a**, 506 [1962].
[8] R. M. BROUDY, J. Appl. Phys. **29**, 853 [1958].

$R(B)$: Widerstand einer Platte beim Magnetfeld B.
R_0: Widerstand einer quadratischen Platte ohne Magnetfeld.
$R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$: Vierpolparameter des Gyrators.
R_h: HALL-Konstante.
s: Tangentialrichtung.
V: Potential in der Halbleiterplatte.
γ: Gewichtsfaktor in Gl. (20).
Θ: HALL-Winkel.
σ: Spezifische Leitfähigkeit der Halbleiterplatte.
Φ: Potential im Netzwerk.

Im Fall eines isotropen Halbleitermaterials gilt für die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ folgende Gleichung [5]:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} + \sigma R_h (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \tag{1}$$

(siehe obiges Symbolverzeichnis).

Im Fall eines zeitlich konstanten Magnetfeldes gilt

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 . \tag{2}$$

Da im Innern der Platte keine Quellen und Senken vorhanden sind, gilt dort

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 . \tag{3}$$

Multipliziert man (1) vektoriell mit $\boldsymbol{E}$, so erhält man

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{E} = \sigma R_h (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{E} ,$$

oder betragsmäßig

$$|\boldsymbol{j}| \cdot |\boldsymbol{E}| \sin \Theta = \sigma R_h |\boldsymbol{j}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{E}| \cos \Theta$$

und

$$\operatorname{tg} \Theta = \sigma \cdot R_h \cdot |\boldsymbol{B}| . \tag{4}$$

Der Winkel zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{j}$, der HALL-Winkel Θ, ist also durch das Magnetfeld und die Materialeigenschaften eindeutig bestimmt und über den Bereich der Platte konstant.

Aus den Gln. (1) bis (3) folgt auf Grund einfacher Vektoroperationen und -identitäten

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = 0 \tag{5}$$

und

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{6}$$

im Innern der Platte.

Aus (2) und (5) folgt, daß das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(x,y)$ und das Stromfeld $\boldsymbol{j}(x,y)$ Potentialfelder sind. Wir beschränken uns im folgenden auf das Potential $V(x,y)$ der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}(x,y)$. Wegen (6) gilt im Innern der Platte die LAPLACEsche Differentialgleichung

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = \Delta V = 0 . \tag{7}$$

Es gelten folgende Randbedingungen:

1. An den *Elektroden* ist das Potential konstant und kann als Randwert vorgegeben sein. Hat die Platte mehr als zwei Elektroden, so ist es auch möglich, daß an einzelnen Elektroden der Wert des Potentials nicht vorgegeben ist und sich aus der Potentialverteilung ergibt. Solche Elektroden seien als *freie Elektroden* bezeichnet.

2. An den *freien Rändern* verläuft die Stromdichte entlang des Randes, die elektrische Feldstärke muß also mit dem Rand den Winkel Θ bilden. Im allgemeinen tritt also zwischen Elektrode und freiem Rand eine Unstetigkeit in der Richtung der elektrischen Feldstärke auf.

Ferner sei noch eine Beziehung abgeleitet, die später verwendet wird. Multipliziert man (1) skalar mit $\boldsymbol{j}$, so erhält man

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} + \sigma R_h (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{j} .$$

Der zweite Term verschwindet, und man erhält für den Betrag von $\boldsymbol{j}$

$$|\boldsymbol{j}| = \sigma |\boldsymbol{E}| \cdot \cos \Theta . \tag{8}$$

2. Herleitung der Analogie

Es ist bekannt, daß die Gl. (7) im zweidimensionalen, ebenen Fall mittels eines Widerstandsnetzwerkes, in dem alle Widerstände denselben Wert haben, gelöst werden kann. Um dies zu zeigen, greift man aus dem Potentialfeld ein Netz von Punkten mit dem Abstand h (Maschenweite) heraus und beschränkt sich darauf, den Wert des Potentials in diesen Punkten zu berechnen. Die Dgl. (7) kann dann in jedem Punkt durch die Differenzengleichung

$$(V_1 - V_0) + (V_2 - V_0) + (V_3 - V_0) + (V_4 - V_0) = 0 \tag{9}$$

approximiert werden (Abb. 2 a). Stellt man andererseits die Knotenpunktsgleichung für einen Punkt in

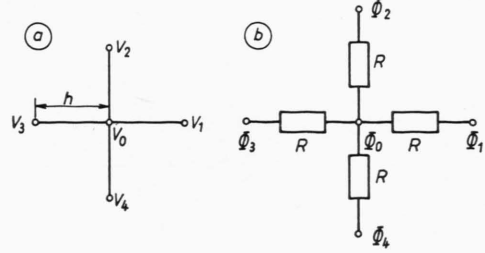


Abb. 2 a. Ausschnitt aus dem Potentialfeld der Halbleiterplatte und Diskretisierung in einzelne Maschenpunkte.

Abb. 2 b. Ausschnitt aus dem Widerstandsnetzwerk.

einem Widerstandsnetzwerk auf (Abb. 2 b), so erhält man

$$(\Phi_1-\Phi_0)/R+(\Phi_2-\Phi_0)/R+(\Phi_3-\Phi_0)/R + (\Phi_4-\Phi_0)/R=0$$

oder

$$(\Phi_1-\Phi_0)+(\Phi_2-\Phi_0)+(\Phi_3-\Phi_0) + (\Phi_4-\Phi_0)=0\,. \tag{10}$$

Die Gln. (9) und (10) sind identisch, wenn man $k\,V=\Phi$ setzt. Ein Potentialproblem kann also auf dem Widerstandsnetzwerk gelöst werden, indem auf dem Rand die wirklichen Randwerte multipliziert mit dem Proportionalitätsfaktor k eingestellt werden. (Für eine ausführliche Darstellung s. z. B. Anm. [9], wo auch ein ausführliches Schrifttum zu finden ist.)

Bei den meisten bisher erschienenen Arbeiten, welche die Lösung von Potentialproblemen mittels eines Widerstandsnetzwerkes behandeln, ist an den freien Rändern $\partial V/\partial n=0$. LIEBMANN hat gezeigt, wie die Randbedingung $\partial V/\partial n \neq 0$ auf dem Netzwerk nachgebildet werden kann [10]. Er betrachtet dazu ein Stück am Rand mit 4 Maschenpunkten mit den Potentialen $V_0, V_2, \ldots, V_4$ und einem fiktiven Punkt mit dem Potential V_1 (Abb. 3 a). Dann gilt im Punkt P_0, wenn für die Bezeichnung der Punkte und der zugehörigen Potentiale dieselben Indizes verwendet werden:

$$(\partial V/\partial n)_{P_0}=(V_1-V_3)/2\,h+\text{Glieder höh. Ordnung.}$$

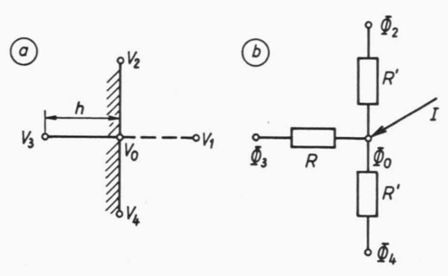


Abb. 3 a. Ausschnitt aus dem Rand der Halbleiterplatte.

Abb. 3 b. Ausschnitt aus dem Rand des Widerstandsnetzwerkes.

Daraus berechnet sich das fiktive Potential V_1:

$$V_1=(\partial V/\partial n)_{P_0}\cdot 2\,h+V_3\,,$$

wenn die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Die Gl. (9) lautet dann in P_0

$$[(\partial V/\partial n)_{P_0}\cdot 2\,h+V_3-V_0] + (V_2-V_0)+(V_3-V_0)+(V_4-V_0)=0\,.$$

Geordnet ergibt dies

$$(V_2-V_0)+2(V_3-V_0)+(V_4-V_0) + (\partial V/\partial n)_{P_0}\cdot 2\,h=0\,. \tag{11}$$

Wir betrachten nun einen Netzwerkpunkt mit Stromeinspeisung am Rand (Abb. 3 b). Für diesen gilt:

$$(\Phi_2-\Phi_0)/R'+(\Phi_3-\Phi_0)/R+(\Phi_4-\Phi_0)/R'+I=0.$$

Falls $R'=2\,R$ gewählt wird, erhält man:

$$(\Phi_2-\Phi_0)+2(\Phi_3-\Phi_0)+(\Phi_4-\Phi_0)+2\,R\,I=0. \tag{12}$$

Gln. (11) und (12) sind identisch, falls wiederum $k\,V=\Phi$ und $k(\partial V/\partial n)_{P_0}\cdot 2\,h=2\,R\,I$

$$I=(h\,k/R)\,(\partial V/\partial n)_{P_0}\,. \tag{13}$$

Daraus geht hervor, daß die Widerstände am Rand doppelt so groß wie im Innern gewählt werden müssen und, falls $\partial V/\partial n \neq 0$, an den Randpunkten ein Strom eingespiesen werden muß.

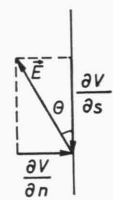


Abb. 4. Richtung der elektrischen Feldstärke am Rand.

In unserem Fall, wo **E** mit dem Rand den Winkel Θ bildet, also (Abb. 4)

$$(\partial V/\partial n)/(\partial V/\partial s)=\operatorname{tg}\Theta\,, \tag{14}$$

muß iterativ vorgegangen werden. Man löst zuerst das Randwertproblem mit $\partial V/\partial n=0$ an den freien Rändern. Dann werden die Potentialdifferenzen gemessen und daraus approximiert (Abb.3 a)

$$(\partial V/\partial s)_{P_0}\approx(V_2-V_4)/2\,h\,. \tag{15}$$

Daher erhält man für den Einspeisestrom:

$$I=(h\,k/R)\,(\partial V/\partial n)_{P_0}=(h\,k/R)\,(\partial V/\partial s)_{P_0}\cdot\operatorname{tg}\Theta = \frac{h\,k}{R}\cdot\frac{V_2-V_4}{2\,h}\cdot\operatorname{tg}\Theta=\frac{\Phi_2-\Phi_4}{2\,R}\operatorname{tg}\Theta\,. \tag{16}$$

[9] W. J. KARPLUS, Analog Simulation, McGraw-Hill, New York 1958.

[10] G. LIEBMANN, Resistance-Network Analogues, Actes Journées Internationales de Calcul analogique, Bruxelles 26. Sept.—2. Oct. 1955 (Comité d'organisation Bruxelles 1956), S. 346.

Die so bestimmten Ströme werden eingespiesen, darauf wieder die Potentialdifferenzen gemessen etc. Es erweist sich als vorteilhaft bei großen Werten von Θ, den Wert für $(\partial V/\partial s)$ nahe an den Elektroden nicht nach (15), sondern graphisch zu approximieren. Die Messungen haben gezeigt, daß es genügt, wenn dies in den Maschenpunkten, welche unmittelbar neben einer Elektrode liegen, durchgeführt wird.

Natürlich erhält man sowohl Einspeiseströme, die ins Netzwerk hinein-, wie auch solche, die aus dem Netzwerk herausgerichtet sind, je nach der Richtung von $\partial V/\partial n$. Interessant ist ferner folgendes. Die ganze Halbleiterplatte befindet sich in einem Magnetfeld, im Netzwerk werden aber nur an den freien Rändern Ströme eingespiesen. Anschaulich kann man sagen, daß diese Ströme die Raumladung nachbilden, welche sich infolge des Magnetfeldes an den freien Rändern bildet. Die POISSONsche Gleichung kann bekanntlich mit einem Widerstandsnetzwerk mit Stromeinspeisung gelöst werden [11].

Ferner sei noch eine Überlegung angeführt, die zu einer Erhöhung der Genauigkeit führen wird. Dazu betrachten wir ein Stück des Randes zwischen zwei Elektroden C und D (Abb. 5) und nehmen an,

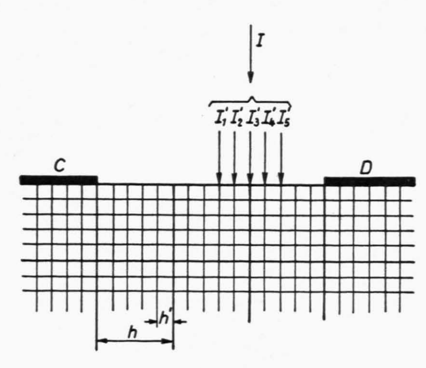


Abb. 5. Einfluß einer Vergrößerung der Maschenweite auf die Einspeiseströme.

dieses Stück sei mit einer kleinen Maschenweite h' und damit einer großen Zahl von Maschenpunkten auf einem Netzwerk nachgebildet. Nun werde eine n-mal größere Maschenweite h gewählt (in Abb. 5 $n=5$). Dabei wird die Zahl der Einspeiseströme ebenfalls n-mal kleiner, dafür der einzelne Einspeisestrom n-mal größer, da $(\Phi_2 - \Phi_4)$ in (16) n-mal größer wird. Betrachten wir Abb. 5, wo $n=5$, so

[11] R. HECHTEL, Telefunken-Röhre Heft **32**, 38 [1955].

können wir sagen, daß der neue Einspeisestrom

$$I = I_1' + I_2' + I_3' + I_4' + I_5',$$

wobei I der Einspeisestrom für die Maschenweite h und $I_1' \dots I_5'$ die Einspeiseströme für die Maschenweite h'. Nun ist aber aus Abb. 5 ersichtlich, daß dann z. B. die beiden an Elektrode D anliegenden Ströme nicht berücksichtigt werden, wenn nur in Maschenpunkte des freien Randes eingespiesen wird. Daher kann die Genauigkeit erhöht werden, wenn in die Elektroden jeweils noch der *halbe* Einspeisestrom des anliegenden Maschenpunktes eingespiesen wird. Dieser zusätzliche Einspeisestrom muß natürlich nur in die freien Elektroden eingespiesen werden, auf denen also kein Randwert vorgegeben ist. Bei den übrigen Elektroden ist der herausfließende Strom durch den Randwert bestimmt.

3. Ermittlung des Stromes in der Halbleiterplatte

Für viele Probleme, z. B. die Ermittlung der Widerstandsänderung einer Halbleiterplatte im Magnetfeld, ist es notwendig, außer der Potentialverteilung auch den Strom zu kennen, der in der Platte fließt. Das Stromlinienfeld im Netzwerk entspricht natürlich nicht dem Stromlinienfeld der Platte. In der Platte stehen Stromdichtevektor und Feldstärkevektor im Winkel Θ aufeinander, währenddem sie im Netzwerk dieselbe Richtung haben. Es muß daher ein Verfahren gefunden werden, das gestattet, den Strom aus dem Potentialfeld zu ermitteln.

Man kann zeigen, daß zwischen dem Strom I_M, der aus einer Elektrode im Netzwerk, und dem Strom I_W, der aus einer Elektrode der Halbleiterplatte austritt, angenähert folgende Beziehung besteht:

$$I_W = (R\,\sigma\,d/k)\;I_M \cos^2 \Theta\,. \qquad (17)$$

Die Messungen zeigten jedoch, daß die Bestimmung des Stromes nach (17) bei größeren Werten des Magnetfeldes mit ziemlich großen Fehlern behaftet ist, auf die in Abschn. 5 näher eingegangen wird. Daher wird die Ableitung von (17) hier nicht gebracht, und es soll eine wesentlich genauere Methode beschrieben werden.

Dazu wird ein Schnitt $A-A'$ durch die Platte gelegt (Abb. 6) und entlang dieses Schnittes die senkrecht dazu stehende Komponente E_V sowie die parallel dazu verlaufende Komponente E_H der elektrischen Feldstärke bestimmt. Dann ergibt sich die

Stromdichte j_V senkrecht zu diesem Schnitt nach (8) zu

$$j_V = E_V\,\sigma\cos^2\Theta \pm E_H\,\sigma\cos\Theta\cdot\sin\Theta. \quad (18)$$

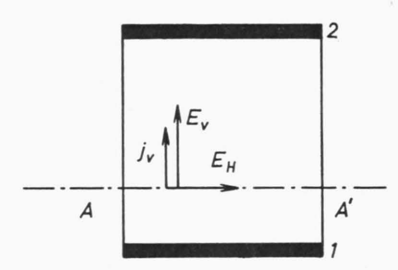


Abb. 6. Quadratische Platte mit Elektroden (1, 2). Schnitt A – A′ zur Ermittlung des Stromes.

Der totale, durch den Schnitt A – A′ fließende Strom I_W beträgt

$$I_W = \sigma\cdot d\left(\cos^2\Theta\int_A^{A'} E_V\,\mathrm{d}l \pm \sin\Theta\cos\Theta\int_A^{A'} E_H\,\mathrm{d}l\right). \quad (19)$$

E_V und E_H werden im Netzwerk aus den Potentialdifferenzen zwischen zwei benachbarten Maschenpunkten berechnet. Die Integrale in (19) wurden in den Messungen durch Planimetrieren bestimmt.

4. Stabilität und Konvergenz

Die Stabilität bei der Lösung der Gleichung

$$\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 = f(V, \partial V/\partial x, \partial V/\partial y)$$

wurde von FISHER untersucht [12]. Stabilität heißt dabei, daß die gewonnenen Lösungen sich mit wachsender Zahl der Iterationsschritte immer weniger ändern [13]. Für den eindimensionalen Fall

$$\partial^2 V/\partial x^2 = f(V, \partial V/\partial x)$$

leitet FISHER einige exakte Stabilitätskriterien ab. Für den zweidimensionalen Fall äußert er die plausible Vermutung, daß die Nachbildung auf dem Netzwerk analog stabil sei, wie das entsprechende „wirkliche" Potentialproblem. Diese Aussage beschränkt er auf Grund seiner Untersuchungen am eindimensionalen Fall auf Verfahren, bei denen alle Einspeiseströme zusammen durch automatische Recheneinheiten eingestellt werden. Bei iterativen Verfahren wie dem unsrigen, bei dem alle Potentialdifferenzen gemessen werden, daraus alle Einspeiseströme berechnet werden etc., können, wie FISHER am eindimensionalen Fall zeigt, Instabilitäten auftreten, obwohl das „wirkliche" Problem diese nicht aufweist. Ein solches Verfahren kann aber „stabilisiert" werden, indem statt des neu berechneten Wertes eines Einspeisestromes ein gewogenes Mittel aus dem vorherigen und dem neu berechneten Wert verwendet wird, also

$$I_{(n+1)} = \left[\gamma\cdot\left(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{2\,R}\right)_{(n)}\cdot\operatorname{tg}\Theta + I_{(n)}\right]\cdot\frac{1}{1+\gamma}\,. \quad (20)$$

Die Indizes bezeichnen dabei den Näherungsschritt. Es wurde hier auf diese Probleme eingegangen, da es sich in den Messungen als nötig erwies, das Verfahren nach (20) zu stabilisieren. Je größer tg Θ, desto kleiner mußte der Gewichtsfaktor γ gewählt werden, um Stabilität zu erreichen.

Die Konvergenz, daß heißt die Tatsache, daß die gewonnenen Näherungen die „exakte" Lösung immer besser approximieren, ist in unserem Fall wegen der Eindeutigkeit der Lösung eine direkte Folge der Stabilität. Die Eindeutigkeit der Lösung ist wegen der Linearität der Differenzengleichungen sowohl im Innern (9), wie auch auf dem Rande [(11) mit (14) und (15)], gewährleistet.

5. Messungen

Für die Messungen wurde das Netzwerk und die Einspeiseanlage verwendet, welche in [14] beschrieben sind. Der Netzwiderstand beträgt 3,5 kΩ, die Einspeiseströme werden an zwei in Reihe geschalteten Potentiometern von 5 MΩ und 0,5 MΩ eingestellt. Für unsere Messungen wurde aus diesem Netzwerk, welches in 50 × 50 Maschen unterteilt ist, ein Streifen von 20 Maschen abgetrennt und beidseitig mit dem doppelten Netzwerkwiderstand abgeschlossen. Sämtliche Spannungen und Einspeiseströme wurden mit einem digitalen Voltmeter gemessen, die Meßanordnung ist in [15] beschrieben.

[12] M. E. FISHER, Brit. J. Appl. Phys. **9**, 288 [1958].

[13] Genau ausgedrückt: Es muß in jedem Punkt gelten $|V_{(n)} - V_{(n-1)}| < \varepsilon$ für n genügend groß. n bezeichnet dabei den Iterationsschritt und ε eine vorgegebene, beliebig kleine Größe.

[14] G. ČREMOŠNIK, Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzes mit Stromquellen, Diss. Eidg. Techn. Hochschule, Zürich 1957, Prom. Nr. 2667.

[15] P. TSCHOPP, Analogieverfahren zur Bestimmung von magnetischen Feldern in nichtlinearen nichtisotropen Medien, Diss. Eidg. Techn. Hochschule, Zürich 1961, Prom. Nr. 3180.

Als erstes wurde die Widerstandsänderung einer *quadratischen Platte* (Abb. 6) im Magnetfeld bestimmt für $\operatorname{tg}\Theta = 1$ und $\operatorname{tg}\Theta = 2$. Die Widerstandsänderung einer quadratischen Platte läßt sich exakt rechnen [5] und beträgt

$$\frac{R(B)}{R(0)} = \frac{\sigma(0)}{\sigma(B)} \frac{1}{\cos\Theta} . \tag{21}$$

Wir erhielten dabei für $\operatorname{tg}\Theta = 1$ $(\Theta = 45°)$ einen Fehler $< 0{,}5\%$ und für $\operatorname{tg}\Theta = 2$ $(\Theta = 63{,}45°)$ einen Fehler von 1,3%, wenn die in der Platte fließenden Ströme nach (19) bestimmt werden. Falls die in der Platte fließenden Ströme nach (17) bestimmt werden, erhält man für $\operatorname{tg}\Theta = 1$ einen Fehler von 6% und für $\operatorname{tg}\Theta = 2$ einen Fehler von etwa 40%. Dies hat folgenden Grund: Formel (17) wurde auf Grund eines kontinuierlichen Modells $(h \to 0)$ abgeleitet. Bei hohen Werten von Θ tritt ein großer Teil des Stromes auf einem sehr kurzen Stück der Elektrode aus und fließt daher in unserem Modell durch einige wenige Maschenwiderstände [(17) ist natürlich einfacher in der Anwendung und kann daher, insbesonders bei kleinen Werten von $\operatorname{tg}\Theta$, als 1. Anhaltspunkt verwendet werden].

Bei diesen Messungen zeigte sich das in Abschn. 4 erwähnte Phänomen der *Instabilität.* Abb. 7 zeigt einige aufeinanderfolgende Näherungen der Potentialverteilung am Rande, wenn jeweils der nach (16) ermittelte Strom eingespiesen wird. Das Verfahren kann aber sehr gut stabilisiert werden, indem man die Einspeiseströme nach (20) berechnet. Der Gewichtsfaktor γ wurde für $\operatorname{tg}\Theta = 1$ zu 1, für $\operatorname{tg}\Theta = 2$ zu 0,4 gewählt. Unsere Messungen stellen damit eine experimentelle Bestätigung der Aussagen von FISHER [12] dar.

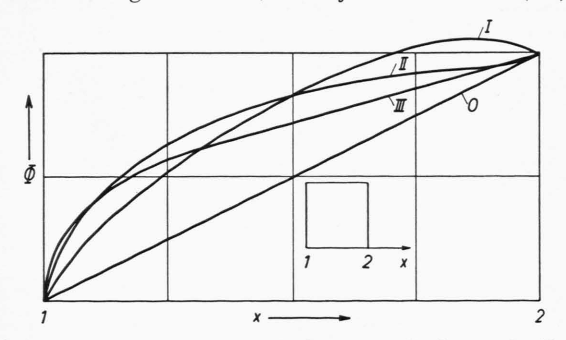


Abb. 7. Aufeinanderfolgende Näherungen (0, I, ...) der Potentialverteilung am Rand der quadratischen Platte, wenn das Verfahren instabil ist.

Als nächste Anwendung wurden einige Eigenschaften des *quadratischen Gyrators* untersucht, der aus einer quadratischen Platte, bei der in der Mitte jeder Seite ein Kontakt angebracht ist (Abb. 8) besteht [2].

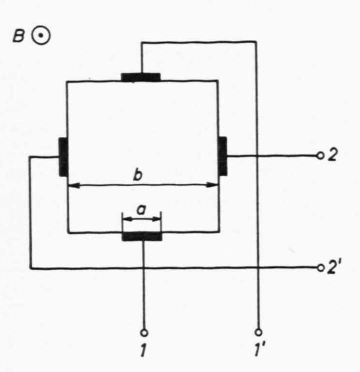


Abb. 8. Quadratischer Gyrator.

Der Gyrator ist ein passiver, *nichtreziproker* Vierpol. Die Vierpolgleichungen lauten

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2 , \\ u_2 &= R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2 , \end{aligned} \tag{22}$$

wobei die Spannungs- und Stromrichtungen nach Abb. 9 gewählt werden. Für unseren quadratischen Gyrator mit gleichen Elektrodenlängen gilt

$$R_{11} = -R_{22} .$$

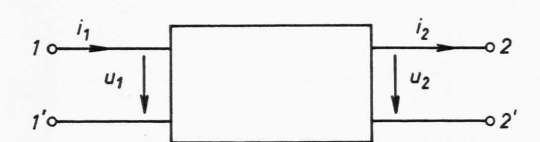


Abb. 9. Spannungs- und Stromrichtungen beim quadratischen Gyrator als Vierpol.

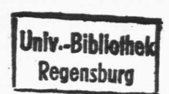
Ferner gilt allgemein $R_{21}(B) = +R_{12}(B)$, falls $R_{12}(B=0) = R_{21}(B=0) = 0$ (s. Anm. [16]). Der Übertragungsverlust für diesen Gyrator beträgt bei beidseitiger Anpassung

$$g = 20 \log \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{11}\sqrt{1 + (R_{12}/R_{11})^2}} \text{ (Dezibel)}. \tag{23}$$

WICK hat gezeigt [4], daß bei $\Theta = 90°$ der minimal mögliche Übertragungsverlust von $-7{,}66$ db erreicht wird.

Als erstes wurde untersucht, welchen Einfluß bei konstantem $\operatorname{tg}\Theta = 1$ die Elektrodenlänge auf den Übertragungsverlust hat. Der Übertragungsverlust

[16] C. B. BURCKHARDT u. M. J. O. STRUTT, Arch. elektr. Übertragung **16**, 597 [1962].



als Funktion von a/b (Abb. 8) ist in Abb. 10 dargestellt. Man sieht, daß der Übertragungsverlust in einem großen Bereich sehr wenig von der Elektro-

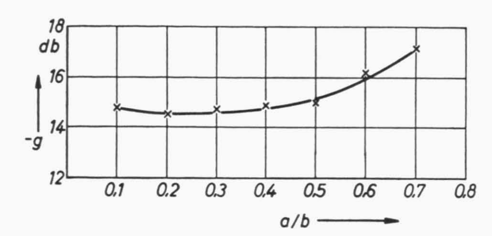


Abb. 10. Übertragungsverlust g des quadratischen Gyrators nach Abb. 8 in Abhängigkeit von a/b, bei tg $\Theta=1$, berechnet aus den Parametern der Abb. 11.

denlänge abhängt. In Abb. 11 ist die Abhängigkeit der Vierpolparameter R_{11} und R_{12} bezogen auf den Widerstand $R_0 = 1/\sigma\, d$ der quadratischen Platte ohne Magnetfeld dargestellt. In Abb. 12 ist das Potentialfeld des Gyrators bei tg $\Theta = 1$ und $a/b = 0{,}2$ dargestellt, wobei der Ausgang $2 - 2'$ nicht belastet ist. (Da das Feld punktsymmetrisch bez. des Mittelpunktes ist, wurde nur eine Hälfte gezeichnet.)

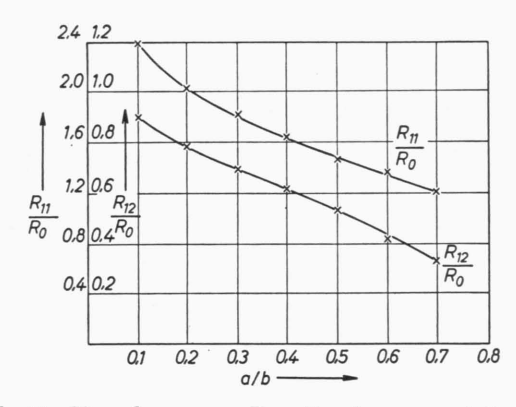


Abb. 11. Vierpolparameter R_{11}, R_{12} (bezogen auf R_0 der quadratischen Platte) des Gyrators nach Abb. 8 in Abhängigkeit von a/b, bei tg $\Theta=1$.

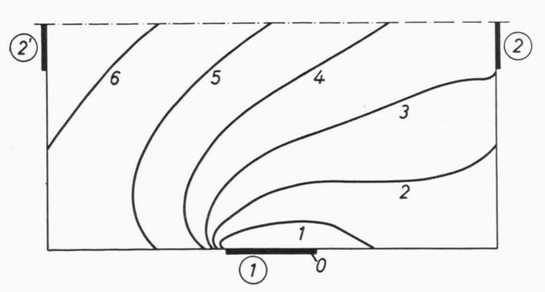


Abb. 12. Potentialverteilung im quadratischen Gyrator der Abb. 8 bei $a/b=0{,}2$ und tg $\Theta=1$.

Weiter wurde ein quadratischer Gyrator mit den Abmessungen von Abb. 13 a aus Indiumarsenid aus der HALL-Generatorfertigung von Siemens & Halske gebaut. Die Leitfähigkeit des Indiumarsenids beträgt $\sigma = 1{,}67 \cdot 10^4\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$ und seine HALL-Konstante $R_\mathrm{h} = 0{,}12 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{As}$ (s. Anm. [17]).

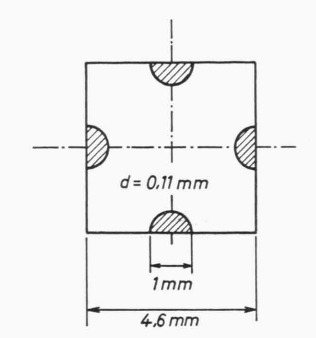


Abb. 13 a. Gyrator aus Indiumarsenid.

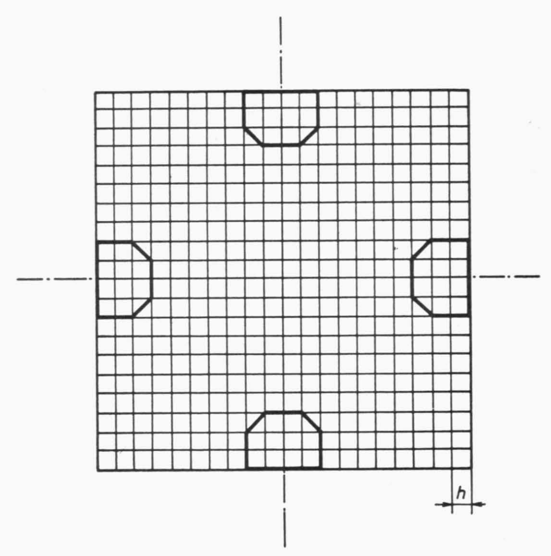


Abb. 13 b. Nachbildung des Gyrators der Abb. 13 a auf dem Widerstandsnetzwerk.

Die Kontakte wurden galvanisch angebracht und mit WOOD-Metall gelötet. Sie sind sehr gut ohmisch, wie experimentell festgestellt wurde. Die Vierpolparameter dieses Gyrators in Abhängigkeit des Magnetfeldes wurden gemessen und sind in Abb. 14 dargestellt; der daraus berechnete Übertragungsverlust in Abb. 15. Darauf wurde die Nachbildung Abb. 13 b auf dem Netzwerk ausgemessen, die entsprechenden Kurven sind ebenfalls in Abb. 14 und 15

[17] F. KUHRT, Siemens-Z. **28**, 370 [1954].

eingetragen. Hierbei wurde die Änderung von σ durch das Magnetfeld berücksichtigt [18]. Messung und Analogie stimmen befriedigend überein. Als Fehlerquellen kommen in Betracht: Toleranz von σ und R_h und geometrische Abweichungen. Ferner dürfte der Fehler der Netzwerkmessung hier etwas größer sein als bei der quadratischen Platte, da die Elektroden kürzer sind.

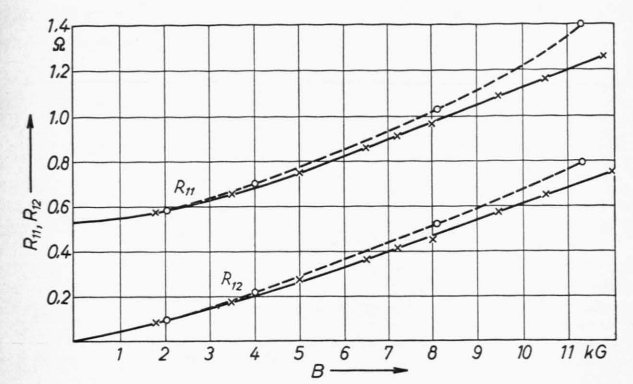


Abb. 14. Vierpolparameter gemessen am Gyrator der Abb. 13 a und ermittelt aus dem Netzwerk (Abb. 13 b) in Abhängigkeit des Magnetfeldes. ×—× gemessen, o---o am Netzwerk ermittelt.

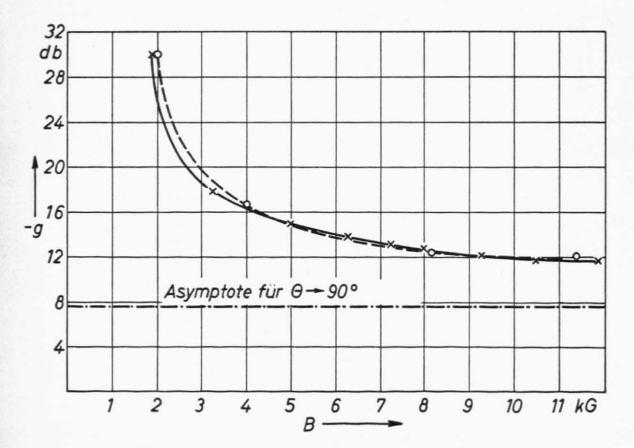


Abb. 15. Übertragungsverlust des Gyrators der Abb. 13 a und 13 b in Abhängigkeit des Magnetfeldes berechnet aus den Parametern der Abb. 14, und zwar ×—× gemessene, o---o am Netzwerk ermittelte Parameter.

6. Schlußfolgerungen

Es wurde gezeigt, daß Potentialfelder von Halbleiterplatten im Magnetfeld mittels eines Analogieverfahrens am Widerstandsnetzwerk mit guter Genauigkeit ermittelt werden können, bis etwa zu HALL-Winkeln für die $\operatorname{tg} \Theta = 2$. Die Genauigkeit ist dabei etwas kleiner als bei Problemen wo $\Delta V = 0$ mit $\partial V / \partial n = 0$ gelöst wird, dürfte aber für viele Anwendungen ausreichend sein. Sie kann natürlich durch Vergrößerung der Maschenzahl erhöht werden, jedoch wächst damit auch der Arbeitsaufwand. Als weitere Anwendungsmöglichkeiten der Methode seien erwähnt: Ermittlung der Kennlinie von HALL-Generatoren mit verbreiterten Elektroden [17], Dimensionierung von sogen. „skew gyrators" [2] (unsymmetrische Gyratoren, die als Isolatoren verwendet werden), Ermittlung der HALL-Konstanten aus Proben beliebiger Geometrie etc. Ferner sei auf folgendes hingewiesen: Die Ermittlung der zulässigen Erwärmung von Elementen, welche auf dem HALL-Effekt beruhen, geschieht meist unter Annahme einer gleichmäßig über die Platte verteilten Leistungsaufnahme [17]. Abb. 12 zeigt aber, daß schon für $\operatorname{tg} \Theta = 1$ die Stromverteilung sehr inhomogen sein kann und nahe den Elektroden sehr große Stromdichten auftreten, dort also eine wesentlich größere Erwärmung auftreten dürfte (proportional j^2). Die Ermittlung der Potentialverteilung ist also auch für die Festlegung der zulässigen Belastung von Nutzen. Die mit dem Netzwerk ermittelten Potentialverteilungen und Parameter haben Gültigkeit bis zu denjenigen Frequenzen, von denen an mit einer Frequenzabhängigkeit der galvanomagnetischen Effekte gerechnet werden muß, was bei bestimmten Rechteckplatten ungefähr bei 10 MHz der Fall war [19].

Das in den Versuchen verwendete Halbleitermaterial wurde uns von Herrn Dr. H. WEISS vom Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke in Erlangen freundlicherweise zur Verfügung gestellt. Die Autoren möchten hierfür ihren besten Dank aussprechen. Herrn A. THÜRING danken sie für die sorgfältige Herstellung des Schliffes.

[18] H. WEISS, Z. Naturforschg. **12 a**, 80 [1957].

[19] P. RAMER, M. J. O. STRUTT u. F. K. VON WILLISEN, Arch. elektr. Übertragung **11**, 1 [1957].